$\mathbb{R}^N$上の不変部分空間 (調和・解析関数空間と線型作用素II)

瀬戸, 道生

数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 44-48

$\mathbb{R}^N$ 上の不変部分空間

東北大・理学研究科　瀬戸 道生 (Michio Seto)
Mathematical Institute Tohoku University

単位円板上の関数論と作用素論との関わりで Beurling の定理が知られている. またこの結果を実軸上にうつしかえたものとして Lax の定理がある. これらの定理の自然な拡張として, また Douglas らの一連の研究 (cf. [1]) とも関連して Beurling-Lax の定理の多変数を考えたい. ここでは二次元トーラスにおける中路の結果 [8] から二次元ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ における Lax の定理を考察する.

定理 1 (Beurling) $\mathcal{M}$ を $L^2(\mathbb{T})$ の閉部分空間で $z\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ をみたすものとする.

$$z\mathcal{M}\neq\mathcal{M}\Leftrightarrow\mathcal{M}=qH^2(\mathbb{T})\quad(|q|=1)$$

ここで $H^2(\mathbb{T})$ は $\mathbb{T}$ 上の Hardy 空間.

$\mathbb{R}$ 上でも同様な結果が知られている.

定理 2 (Lax [4]) $\mathcal{M}$ を $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間で $e^{i\lambda x}\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ $(\lambda\geq 0)$ をみたすものとする.

$$e^{i\lambda x}\mathcal{M}\neq\mathcal{M}\Leftrightarrow\mathcal{M}=qH^2(\mathbb{R})\quad(|q|=1)$$

ここで $H^2(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Hardy 空間.

Lax は Beurling の定理とは独立に彼の定理を証明したが Hoffman は一次分数変換を用いて Beurling の定理の系として Lax の定理を導いた ([2]). この Hoffman の議論の多次元版を考えたいが, 多変数のときは一変数のときのように全ての不変部分空間がはっきりと書き下せることは望めない. しかしある条件の下ではその形は決まることが知られている.

定義 3 $L^2(\mathbb{T}^2)$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ が $z\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$, $w\mathcal{M}\subseteq\mathcal{M}$ をみたすとき $\mathcal{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とよぶ. ここで z,w は $\mathbb{T}^2$ 上の座標関数とする.

また V_z を $f\in\mathcal{M}$ に対し $V_zf=P_{\mathcal{M}}M_zP_{\mathcal{M}}f$ で定まる $\mathcal{M}$ 上の有界線型作用素とする. ($P_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ への射影, M_z は通常の z による掛け算作用素.) V_w も同様とする. 特にこれからの議論では V_z, $V_w\in\mathcal{B}(\mathcal{M})$ とみることに注意する.

定理 4 (中路 [8]) $\mathcal{M}$ を $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間とする. $V_zV_w^*=V_w^*V_z$ となる必要十分条件は次の (i), (ii), (iii) のいずれか一つが成り立つことである.

(i) $\mathcal{M}=\chi_EL^2(\mathbb{T}^2)\oplus\chi_F\phi H_z^2(\mathbb{T}^2)\quad(|\phi|=1,\ E\cap F=\emptyset,\ F=A\times\mathbb{T})$

(ii) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T}^2) \oplus \chi_G \psi H^2_w(\mathbb{T}^2) \quad (|\psi| = 1,\ E \cap G = \emptyset,\ G = \mathbb{T} \times B)$

(iii) $\mathcal{M} = qH^2(\mathbb{T}^2) \quad (|q| = 1)$

ここで $H^2_z(\mathbb{T}^2)$ は z に関する $L^2(\mathbb{T})$ と w に関する $H^2(\mathbb{T})$ とをテンソルした空間. $H^2_w(\mathbb{T}^2)$ も同様に定める. $H^2(\mathbb{T}^2) = H^2(\mathbb{T}) \otimes H^2(\mathbb{T})$ となることに注意する.

$L^2(\mathbb{T}^2)$ をフーリエ変換した先の空間 $\mathbb{Z}^2$ の言葉でいえば z を掛ける作用は右に移動させる作用になっていることに注意しておく.

ここで, 上の定理 4 の $V_z V_w^* = V_w^* V_z$ という条件は, V_z で生成されるノイマン環が V_w で生成されるノイマン環の可換子環に含まれることを意味する. ここから V_z, V_w それぞれのユニタリパートへの射影作用素の可換性が導かれ, 空間 $\mathcal{M}$ は不変部分空間による直交分解が可能であることがわかる.

$\mathbb{R}^2$ 上でこの定理 4 に相当するものを考えたい. ここで Lax の定理の単純な類推として次の定義を与える.

定義 5 $L^2(\mathbb{R}^2)$ の閉部分空間 $\mathcal{M}$ が不変部分空間であるとは, 任意の $s,\ t \geq 0$ に対して $e^{isx}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, $e^{ity}\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ が成り立つこととする. $\mathbb{T}^2$ の場合と同様に S_s と T_t で $\mathcal{M}$ 上の e^{isx} と e^{ity} による掛け算作用素を定める.

定理 4 と同様な可換条件を考えると次のことがいえる.

定理 6 ([6]) $\mathcal{M}$ を $L^2(\mathbb{R}^2)$ の不変部分空間とする.

任意の $s, t \geq 0$ に対し $S_s T_t{}^* = T_t{}^* S_s$ となる必要十分条件は次の (i), (ii), (iii) のいずれか一つが成り立つことである.

(i) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{R}^2) \oplus \chi_F \phi H^2_x(\mathbb{R}^2) \quad (|\phi| = 1,\ E \cap F = \emptyset,\ F = A \times \mathbb{R})$

(ii) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{R}^2) \oplus \chi_G \psi H^2_y(\mathbb{R}^2) \quad (|\psi| = 1,\ E \cap G = \emptyset,\ G = \mathbb{R} \times B)$

(iii) $\mathcal{M} = qH^2(\mathbb{R}, dx) \otimes H^2(\mathbb{R}, dy) \quad (|q| = 1)$

ここで $H^2_x(\mathbb{R}^2)$, $H^2_y(\mathbb{R}^2)$ は以下のように定めたものとする.

$H^2_x(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}, dx) \otimes H^2(\mathbb{R}, dy)$, $H^2_y(\mathbb{R}^2) = H^2(\mathbb{R}, dx) \otimes L^2(\mathbb{R}, dy)$

証明 H_S を S_s の無限小生成作用素とする. H_S は $\mathcal{D}(H_S)$ 上の densely defined closed symmetric operator, もっとはっきりいえば H_S は $\mathcal{D}(H_S)$ 上で x を掛ける作用.

V_x で H_S の Caley 変換を表す. すなわち

$$V_x = c(H_S) = (H_S - iI)(H_S + iI)^{-1},$$

このとき V_x は $(x-i)/(x+i)$ による $\mathcal{M}$ の上の掛け算作用素となり V_x は $\mathcal{M}$ 上の等距離作用素. 同様に V_y を T_t から定まる $\mathcal{M}$ 上の等距離作用素として定める.

$\{S_s\}_{s \geq 0}$ と $\{T_t\}_{t \geq 0}$ は $\mathcal{M}$ 上の半群なので, V_x と V_y は以下のような積分表示ができる.

$$I - V_x = 2\int_0^\infty e^{-s} S_s ds$$

$$I - V_y = 2\int_0^\infty e^{-t} T_t dt$$

仮定 $S_s T_t{}^* = T_t{}^* S_s$ for any $s, t \geq 0$ より $V_x V_y^* = V_y^* V_x$.

ここで $L^2(\mathbb{R}^2)$ から $L^2(\mathbb{T}^2)$ へのユニタリ作用素 U を次のように定める.

$$U : \frac{1}{\pi^2}\frac{(x-i)^k}{(x+i)^{k+1}}\frac{(y-i)^l}{(y+i)^{l+1}} \mapsto z^k w^l$$

ここで z と w は $\mathbb{T}^2$ の座標関数. この作用は [2] で定義された写像をテンソルしただけである. 特に

$$\begin{aligned} U &: H^2(\mathbb{R}, dx) \otimes H^2(\mathbb{R}, dy) \to H^2(\mathbb{T}^2) \\ U &: H_x(\mathbb{R}^2) \to H_z^2(\mathbb{T}^2) \\ U &: H_y(\mathbb{R}^2) \to H_w^2(\mathbb{T}^2). \end{aligned}$$

$U(\mathcal{M})$ は $L^2(\mathbb{T}^2)$ の不変部分空間となり V_z, V_w で $U(\mathcal{M})$ 上で z と w を掛ける作用素を定理 4 と同様に表すとすれば $V_x = U^* V_z U$, $V_y = U^* V_w U$. よって $V_x V_y^* = V_y^* V_x$ となる必要十分条件は $V_z V_w^* = V_w^* V_z$ である事がわかる. 後は定理 4 に U^* を作用させればよい.

以上と類似の議論は次元が 2 以上の場合でも可能である. $\mathbb{R}^N$ でも $\mathbb{T}^N$ でも先の議論より同じなので $\mathbb{T}^N$ の場合で話をすれば, $N = 2$ のときと同様に各変数 z_k ごとに作用素 $V_k = P_\mathcal{M} M_{z_k} P_\mathcal{M}$ を定義し, 同様な可換性を考えればよい. 例えば 3 次元の場合は次のようになる.

定理 7 $\mathcal{M}$ を $\mathbb{T}^3$ の不変部分空間とする. 任意の $j \neq k$ に対して $V_j V_k{}^* = V_k{}^* V_j$ が成り立つならば $\mathcal{M}$ は次のいずれか一つである.

(i) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{1,2}} \phi_1 H^2_{z_1,z_2}(\mathbb{T}^3)$
$\oplus \chi_{E_{3,1}} \phi_2 H^2_{z_3,z_1}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{2,3}} \phi_3 H^2_{z_2,z_3}(\mathbb{T}^3)$

(ii) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{1,2}} \phi_1 H^2_{z_1,z_2}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{3,1}} \phi_2 H^2_{z_3,z_1}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_1} \phi_3 H^2_{z_1}(\mathbb{T}^3)$

(iii) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{1,2}} \phi_1 H^2_{z_1,z_2}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{2,3}} \phi_2 H^2_{z_2,z_3}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_2} \phi_3 H^2_{z_2}(\mathbb{T}^3)$

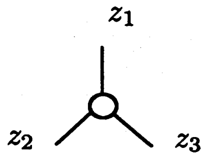
(iv) $\mathcal{M} = \chi_E L^2(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{2,3}} \phi_1 H^2_{z_2,z_3}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_{3,1}} \phi_2 H^2_{z_3,z_1}(\mathbb{T}^3) \oplus \chi_{E_3} \phi_3 H^2_{z_3}(\mathbb{T}^3)$

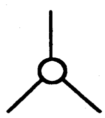
(v) $\mathcal{M} = qH^2(\mathbb{T}^3)$

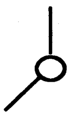
ここで $H^2_{z_i,z_j}(\mathbb{T}^3)$ は変数 z_i, z_j についての $L^2(\mathbb{T})$ とその他の変数についての $H^2(\mathbb{T})$ とをテンソルした空間. また特に $H^2(\mathbb{T}^3) \equiv H^2(\mathbb{T}) \otimes H^2(\mathbb{T}) \otimes H^2(\mathbb{T})$. ϕ_i と q は絶対値をとると 1 となる関数, $\chi_{E_{i,j}}$ は変数 z_i と z_j とに依存する関数, χ_{E_i} は変数 z_i だけに依存する関数.

一般の N で同様な可換性を仮定したときに定理 4, 定理 7 のような表示を得ようとするのは困難なことである. しかし問題は次のようにまとめられる.

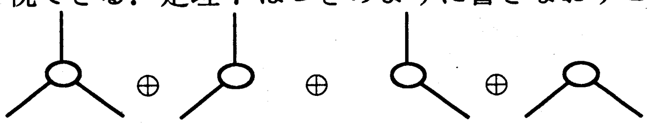
下のように丸から出ている腕に名前を z_1, z_2, z_3 とそれぞれつける. 以下に出てくる空間は定理 7 に出てきたものと全く同様とする. 関数空間の添え字 z_1, z_2, z_3 とこの名づけた腕の名前で対応させ, 関数空間と図を同一視する. 添え字 z_i の意味するところはその空間の上に V_i を制限すると z_i 方向でユニタリになっているという事であった.

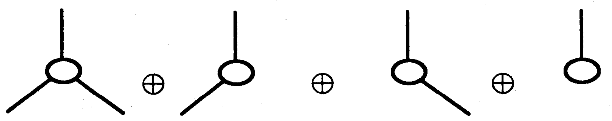


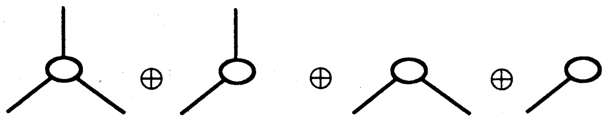
 $\cong \chi_E L^2(\mathbb{T}^3)$,

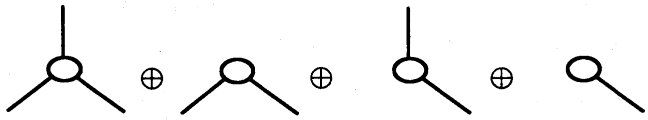
 $\cong \chi_E \phi H^2_{z_1,z_2}(\mathbb{T}^3)$,  $\cong \chi_E \phi H^2_{z_1}(\mathbb{T}^3)$,  $\cong q H^2(\mathbb{T}^3)$,

この対応で定理 7 に直和の成分として出てきた各関数空間を全てこのような図と同一視できる. 定理 7 はつぎのように書きなおすことができる.

(i) 

(ii) 

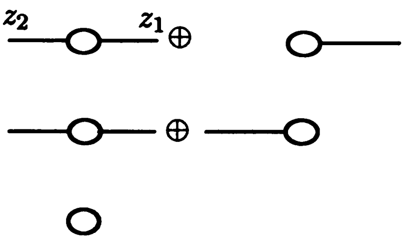
(iii) 

(iv) 

(v) 

$N = 2$ のときも同様な図を考えることにより次のように書きなおすことがで

(i)
(ii)
(iii)



さらに次元を増やしても, 同様な可換性を仮定したときは次の事実より定まるルールに従い組み合わせを数えることで空間の形は求まる.

$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ を $L^2(\mathbb{T}^N)$ の不変部分空間で $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$. このとき任意の $f \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{N}$ に対して $fg = 0$.

これは関数空間の前にある特性関数の変数に注意すると, 図の言葉では, 「直和の成分から任意に二つの図を取り出したとき, その二つの図には少なくとも一つ共通する腕がある」と言いかえることができる.

この方針で $N = 4$ のときは 13 個の空間が出てくることがわかる. 理屈では何次元でも同様な可換性があればこのルールに従い図の組み合わせを数えるだけで不変部分空間が求まるが一般の N 次元でそれを知ろうとするのは難しい.

References

[1] R. G. Douglas and V. I. Paulsen, *Hilbert modules over function algebras*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **217**, Longman Scientific and Technical

[2] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J. ,1962

[3] K. Izuchi, *Invariant subspace on a torus*, lecture notes (1998), unpublished

[4] P. D. Lax, *Translation invariant subspace*, Acta Math. **101** (1959), pp. 163-178

[5] V. Mandrekar, *The validity of Beurling theorems in polydiscs*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), pp. 145-148

[6] M. Seto, *Invariant subspaces on* $\mathbb{T}^N$ *and* $\mathbb{R}^N$, preprint

[7] T. Nakazi, *Certain invaraiant subspaces of* H^2 *and* L^2 *on a bidisc*, Canad. J. Math **40** (1988), pp. 1272-1280

[8] ——, *Invariant subspaces in the bidisc and commutators* J. Austral. Math. Soc. (Series A) **56** (1994), pp. 232-242

[9] W. Rudin, *Function theory in polydiscs*, Benjamin, Inc.